

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ: ПРИЛОЖЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КРУПНОМАСШТАБНОЙ АНИЗОТРОПИИ КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ В СПЕКТРАХ ИЗЛУЧЕНИЯ ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ THE MATHEMATICAL THEORY OF MEASUREMENT PROBLEMS: APPLICATIONS

Левин С.Ф. (S. Levin), доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой метрологии МИЗИ

## ВВЕДЕНИЕ

Основой космологии XX века были красное смещение  $z$  в спектрах галактик, которое обнаружил в 1914 году V. Slipher, шкалы фотометрических расстояний, модель «расширяющейся Вселенной» А. Фридмана 1922 года и обнаруженная 7 годами позже статистическая зависимость скорости  $cz$  разбегания галактик от расстояния  $r$ , которую установил Е. Хаббл, – закон Хаббла:

$$cz = H_0 \cdot r, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света,  $H_0$  – постоянная Хаббла. Ее оценки с 1936 по 1958 год снизились с 530 до 75 км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup>, а к 1971 году – еще в 1,4 раза<sup>1</sup>, что дало повод шутке: «нет ничего более переменного, чем постоянная Хаббла»!

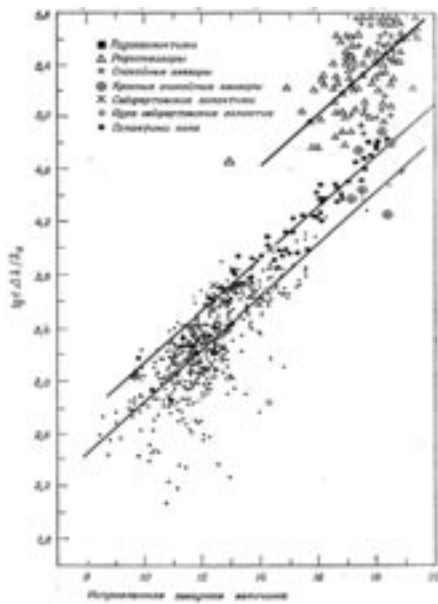


Рис. 1 [1, рис. 35]. Диаграмма Хаббла: нижняя линия – для 474 галактик поля; средняя линия – для 65 ярчайших галактик; верхняя линия – для 200 квазаров

В 1959 году W. Mattig получил решение уравнения Фридмана для всех значений красного смещения:

$$\lg \{ cz + (1 - 1/q_0) \cdot [\sqrt{2q_0 z + 1} - 1] \} = 1 + \lg(H_0 q_0) + 0,2 \cdot (m - M)$$

где  $(m - M)$  – наблюдаемая и абсолютная звездные величины внегалактических объектов, а их разность – модуль расстояния,  $q_0$  – параметр замедления «расширения». По этому уравнению в виде диаграммы Хаббла с параметром нуля–punkта  $\theta_0$  соответственно типу

<sup>1</sup> 1 Мпс – 1 мегапарсек = 3,263 · 10<sup>6</sup> световых лет = 30,857 · 10<sup>18</sup> км (единица длины в астрономии).

объектов исследуют связь красного смещения и звездной величины (рис. 1) [1]:

$$\lg cz|_{q_0=1} = \theta_0 + 0,2 \cdot m = (1 + \lg H_0 - 0,2M) + 0,2m \quad (2)$$

В 1961 году F. Hoyle дополнил закон Хаббла:

$$z = (H_0/c) \cdot r + Kr^2. \quad (3)$$

Спустя 5 лет, когда [2] было установлено, что галактики при  $r = 10^9$  световых лет движутся на 10000 км·с<sup>-1</sup> быстрее расчетного значения (1), оказалось, что  $K \approx (H_0/c)^2$ , а модели (1) и (3) могут быть частями разложения в ряд [4]:

$$z = (H_0/c) \cdot r [1 - (H_0/c) \cdot r].$$

Это соотношение с особой точкой при  $r = c/H_0$  потребовало вернуться к оценке 1956 года [3]:  $H_0 = 170$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup>. Она уменьшала «возраст Вселенной» до геологического возраста Земли.

В 1960-е годы Н. Агр [5], изучая т.н. «взаимодействующие галактики и квазары» с различающимися красными смещениями, выдвинул гипотезу о несоответствии красного смещения квазаров закону Хаббла. Его поддержали известные исследователи квазаров G. Burbidge и M. Burbidge [6].

В 1941 году W. Adams измерил поглощение света звезды  $\zeta$  Ophiuchus возбужденными радиками межзвездного циана, а А. McKellar методом косвенного измерения оценил температуру неизвестного источника возбуждения:  $\approx 2,3$  К. Но на этом исследования были прекращены.

В 1946 году Г. Гамов разработал теорию «горячей Вселенной», которая предсказывала существование остаточного или реликтового излучения с температурой 3 К. Его в 1957 году зарегистрировал рупорной антенной на волне 3,2 см аспирант ФИАН Т. Шамонов под руководством одного из зачинателей радиоастрономии в СССР Э. Хайкина.

Но они так и не заметили своего открытия.

Обнаружили же реликтовое излуче-

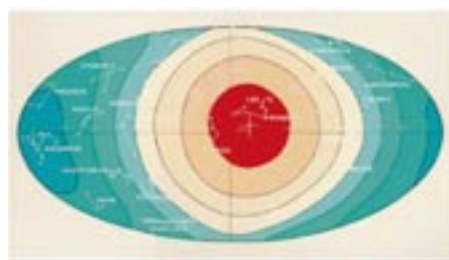


Рис. 2. Дипольная анизотропия реликтового излучения на небесной сфере в экваториальных координатах (U-2)

ние совершенно случайно А. Penzias и R. Wilson в 1965 году, а через 6 лет его дипольную анизотропию амплитудой  $3,2 \pm 0,8$  мК с максимумом на прямом восхождении  $\alpha = 10 \dots 11$  ч наблюдал Р. Henry. В 1977 году G. Smoot и др., связав анизотропию реликтового излучения с эффектом Доплера, установили, что относительно него Солнце движется со скоростью 350 км·с<sup>-1</sup> к точке в созвездии Leo (Лев)  $\alpha = 11$  ч и  $\delta = +4^\circ$ , а в 1981 году M. Gorenstein и G. Smoot по данным измерений на самолетах U-2 указали диполь (рис. 2) на оси Leo–Aquarius (Водолей) [7].

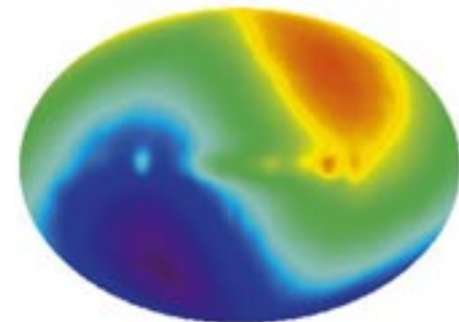


Рис. 3. Карта дипольной анизотропии реликтового излучения в галактических координатах (COBE)

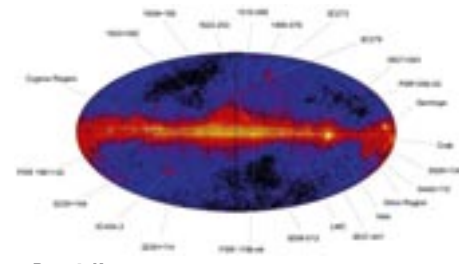


Рис. 4. Карта гамма-излучения в галактических координатах, полученная телескопом EGRET обсерватории имени Комптона

В 1992 году спутники «Реликт» и COBE (Cosmic Background Explorer) уточнили характеристики диполя (рис. 3). Его аномалии совпали с мощными внегалактическими гамма-источниками (рис. 4).

В 1980-е годы были обнаружены первые крупномасштабные потоки галактик. Первым был поток со скоростью 300 км·с<sup>-1</sup> к сверхскоплению Virgo (Дева), в направлении которого G. Vaucouleurs и W. Peters зафиксировали постоянную Хаббла  $H_0 \approx 50$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup> при среднем значении по небесной сфере  $H_0 \approx 100$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup>, рассчитанном по выборке объемом  $N = 500$  галактик. Далее – потоки к сверхскоплению Вели-

кий Атрактор в Centaurus (Центавр) со скоростями 200...600 км·с<sup>-1</sup>.

В 1998 году при аттестации системы «ММК-стат М» в рамках проекта «Прогноз-ММК» [8] по данным [1] была идентифицирована зависимость красного смещения от звездных величин  $m$ , экваториальных координат  $(\alpha, \delta)$  и угловых размеров  $\theta$  для  $N=119$  радиогалактик и  $N=124$  квазаров [9]:

$$\lg cz_{RG} = 0,54940486 + 0,3237032 m - 5,2395416 \cdot 10^{-3} \cdot m^2 - 8,3738443 \cdot 10^{-4} \cdot \theta - 1,3164689 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^2 + 1,8626636 \cdot 10^{-4} \cdot \delta^2 - 1,5006558 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha \delta + 2,6678378 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha m + 1,177783 \cdot 10^{-6} \cdot \theta^2 + 2,35884732 \cdot 10^{-6} \cdot \delta \theta \pm 0,123;$$



Рис. 5 [9]. Зависимость красного смещения квазаров в экваториальных координатах с минимумом по прямому восхождению  $\alpha \approx 15$  ч в Centaurus-Virgo-Leo

$$\lg cz_{QSO} = -1,8650157 \cdot 10^{-3} \cdot \delta - 2,6945406 \cdot 10^{-1} \cdot \alpha + 8,2279198 \cdot 10^{-2} \cdot m + 4,3915797 \cdot 10^{-2} \cdot \theta + 2,2102848 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^2 + 1,2364350 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha m + 4,9220020 \cdot 10^{-5} \cdot \theta^2 + 1,0164755 \cdot 10^{-4} \cdot \delta \theta - 3,3828735 \cdot 10^{-3} \cdot m \theta \pm 0,367,$$

где со знаком  $\pm$  указан средний модуль погрешности неадекватности. При этом была отмечена связь с анизотропией реликтового излучения (рис. 5), но тогда этот результат развития не получил.

В том же году группа И. Караченцева Специальной астрофизической обсерватории РАН обнаружила в красном смещении галактик квадрупольную

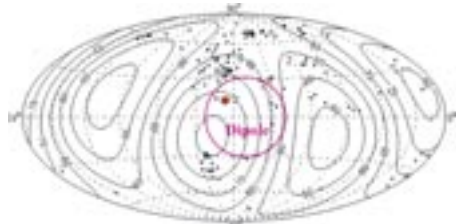


Рис. 6 [10, рис. 4.2]: Карта локальных оценок постоянной Хаббла местного поля галактик в экваториальных координатах: ● - сверхскопление Virgo

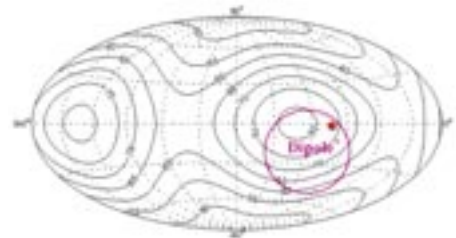


Рис. 7 [10, рис. 4.5]: Карта анизотропии местного поля скоростей галактик в сверхгалактических координатах: ● - сверхскопление Virgo

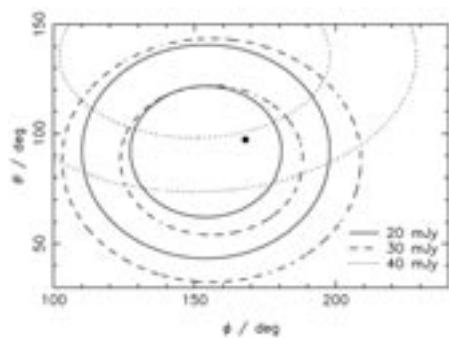


Рис. 8. Карта плотности излучения радиогалактик. Точка - ось диполя реликтового излучения

анизотропию (рис. 6), а Д. Макаров идентифицировал диполь анизотропии постоянной Хаббла для галактик местного поля (рис. 7) [10].

В 2000 году по данным инфракрасного обзора спутника IRAS была выявлена анизотропия поверхностной плотности галактик.

Накопленные в XX веке данные астрофизических измерений открыли «новую эру в космологии, положив начало ее превращению из мифа и спекуляций в полноценное научное направление» [7].

Исследование космической анизотропии в XXI-м веке получило дальнейшее развитие.

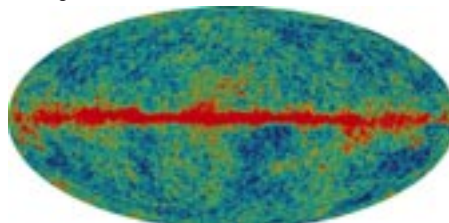


Рис. 9. Карта мультипольной анизотропии реликтового излучения в галактических координатах (полоса - излучение Млечного Пути)

В 2001 году в проекте Hubble Space Telescope (HST) Key Project по сверхновым типа Ia и II, соотношению Талли-Фишера и флуктуациям поверхностной яркости при трех схемах взвешивания была получена очередная оценка постоянной Хаббла  $H_0 = 72 \pm 8$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup> [11].

В 2002 году С. Blake и J. Wall [12] идентифицировали диполь анизотропии плотности распределения радиогалактик с апексом  $\alpha = 11,2$  ч и  $\delta = -7,2^\circ$  в области диполя реликтового излучения (рис. 8).

В 2003 году по данным измерений космического зонда WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) методом максимального правдоподобия по критерию  $\chi^2$  для гипотезы гауссовости была обнаружена предсказанная теорией «расширяющейся Вселенной» мультипольная анизотропия реликтового излучения (рис. 9). При этом точность измерений по сравнению с COBE возросла еще на три порядка, чувствительность - в 45 раз, а угловое разрешение - в 33 раза, что позволило получить очередную оценку постоянной Хаббла  $H_0 = 71^{+4}_{-3}$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup> [13].

В 2005 году И. Караченцев и С. Митронова идентифицировали поле peculiar скоростей 2724 галактик каталога 2MFGC в объеме 100 Мпс (рис. 10) с максимумами в Hydra (Гидра)-Centaurus (Центавр) и минимумами в зонах пустот Virgo (Волопас) и Местной [14]. В 2006 году по данным HST о цефеидах и сверхновых типа Ia на масштабе от 4 до 200 Мпс была получена оценка  $H_0 = 62,3 \pm 8$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup> [15].

В 2007 году М. McClure и С. Dyer [16] по данным наблюдений в программе HST Key Project по 76 объектам на масштабах  $(10...20)^\circ$  оценили угловые вариации  $H_0 \sim 9$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup> (рис. 11), используя этот факт для объяснения расхождений оценок постоянной Хаббла у различных исследователей. В том же году Р. Кривонос выявил диполь излучения галактик в гамма-диапазоне (рис. 12), совпадающий с данными инфракрасного обзора IRAS [17].

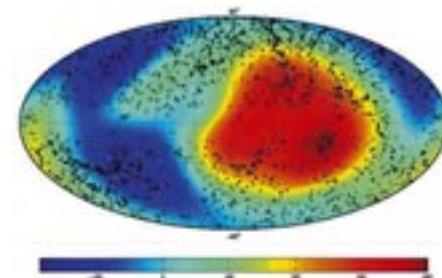


Рис. 10 [13]. Карта peculiar скоростей галактик каталога 2MFGC (км/с)

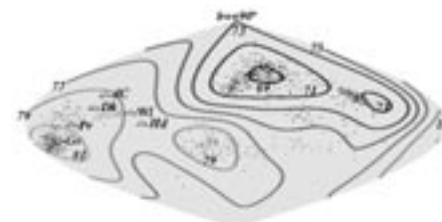


Рис. 11 [15]. Карта HST Key Project распределения по небесной сфере постоянной Хаббла  $H_0$  (км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup>)

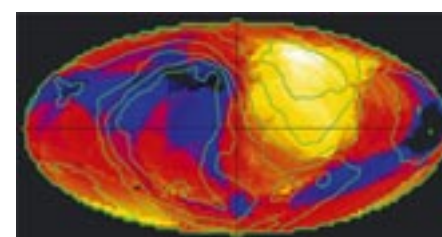


Рис. 12 [16]. Карта распределения галактик в радиусе 70 Мпс. Контуры - данные спутника IRAS

В 2008 году орбитальный рентгеновский телескоп ROSAT подтвердил факт коллективного движения около 700 скоплений галактик со скоростью  $\sim 1000$  км·с<sup>-1</sup> в направлении Centaurus-Vela (Паруса). В 2009 году уточнение по данным наблюдений HST 240 долгопериодических цефеид и 6 сверхновых типа Ia дало еще одну оценку постоянной Хаббла:  $H_0 = 74,2 \pm 3,6$  км·с<sup>-1</sup>·Мпс<sup>-1</sup> [18].

(Продолжение следует)

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ: ПРИЛОЖЕНИЯ

## ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КРУПНОМАСШТАБНОЙ АНИЗОТРОПИИ КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ В СПЕКТРАХ ИЗЛУЧЕНИЯ ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

### THE MATHEMATICAL THEORY OF MEASUREMENT PROBLEMS: APPLICATIONS

Левин С.Ф. (S. Levin), доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой метрологии МИЭИ

(Продолжение, начало см. № 6-2009)

#### ПРОБЛЕМА АНАЛИЗА ДИАГРАММЫ ХАББЛА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Большинство перечисленных выше результатов получено методами, применение которых требует проверки выполнения ряда условий, известных в теории измерительных задач и математической статистике [19]: статистической однородности, центрированности, гауссовости, некоррелированности, неконфликтности, неограниченности переменных математической модели, единообразия принципов определения характеристик точности и корректности формулировки цели измерительной задачи.

Рассмотрим подробнее последствия нарушения этих условий.

Нарушение условия статистической однородности данных (стохастичности по А.Н. Колмогорову) ведет к появлению ненаблюдаемых дополнительных случайных погрешностей (СлП) оценок и даже к невозможности применения математической статистики. Это обстоятельство иллюстрирует обзор небесной сферы HST [20] по данным о красном смещении  $z$  в цветовой шкале (рис. 13), где отмечены границы области небесной сферы в районе диполей реликтового излучения и красного смещения в спектрах внегалактических источников.

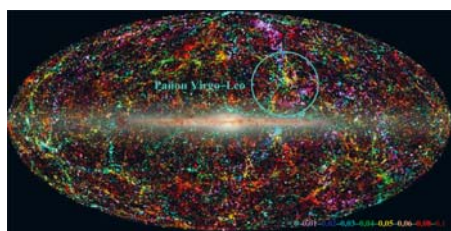


Рис. 13 [20, Fig. 3]. Распределение красных смещений в спектрах галактик в цветовой шкале и в галактических координатах

Нарушение условия центрированности вызвано наличием неисключенных систематических погрешностей (НСП) измерений и использованием статистик, не соответствующих в методе максимального правдоподобия виду распределения.

Известно, что статистическая обработка данных WMAP ведется методом максимального правдоподобия [21], предложенным Р. Фишером в 1912 году, и методом байесовского оценивания [22]. Их используют, как правило, в режиме «подгонки», и для одних и тех же данных они дают различные оценки, на

что обратил внимание (к сожалению, лишь) в 2006 году М.Е. Прохоров [23].

А ведь эти методы построены в рамках различных концепций вероятности (табл. 1).

Кроме того, на характеристики анизотропии реликтового излучения высоких порядков влияет использование «эффект интерполяции» сферическими гармониками. Этим дефектом обладает и разложение Фурье, система гармоник которого привязана к интервалу наблюдения. Для преодоления дефекта применяют предварительное сканирование по частоте или периоду. Поэтому введение неевклидовых геометрий – это следствие

же утверждали, что 6-параметрическая CDM-модель в плоском пространстве дает приемлемое описание экспериментальных данных о спектрах.

Однако величины  $\chi^2$  для нее недопустимо велики, и вероятность принятия этой модели составляет 5% [25].

М. Tegmark и др. [26] представили карты FCM (foreground cleaned map) и WFM (Wiener-filtered map), тоже объявив о гауссовости. Но D. Spergel и др. [13] сразу же указали, что избыток  $\chi^2$  обусловлен гравитационным линзированием, угловыми вариациями диаграммы направленности WMAP и небольшим негауссовым шумом [25].

#### КОНЦЕПЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Концепция	Принципы определения вероятностей для значений $x$ случайной величины $X$
Аксиоматическая Муавра–Лапласа	<b>принцип равной вероятности:</b> $P\{a \leq x_n < X < x_n \leq b\} = (x_n - x_n)/(a - b)$ .
Частотная Пуассона–Мизеса	<b>принцип апостериорной вероятности:</b> $P\{a \leq x_n < X < x_n \leq b\} = \omega\{a \leq x_n < X < x_n \leq b\}/N$ .
Субъективная Бернулли–Бейеса	<b>принцип априорной вероятности:</b> <i>экспертная оценка возможности события <math>\{a \leq x_n &lt; X &lt; x_n \leq b\}</math>, конвенция.</i>
Интерполяционная Гаусса–Фишера	<b>принцип наибольшего правдоподобия:</b> <i>интерполяция статистического распределения величины <math>X</math> распределением вероятностей по критерию максимума правдоподобия и вероятности согласия или минимума погрешности неадекватности.</i>

исчерпания ресурса точности описания математическими моделями космические объектов измерений в системах координат евклидовой геометрии.

Нарушение условия гауссовости является жестким ограничением для регрессионного анализа – его оценки теряют привлекательные свойства. Отсутствие альтернатив гипотезе гауссовости, группирование данных и критерий  $\chi^2$ , придающим больший вес наименее надежной части данных на краях распределений, упрощают вычисления, искажая его вид и завышая вероятность согласия.

Так, Е. Komatsu и др. [24] объявили, что фон реликтового излучения гауссов на уровне достоверности 95%, но представили карту ILC (internal linear combination – рис. 14), не предназначенную для исследования реликтового излучения из-за «сложных свойств шума». Они так-

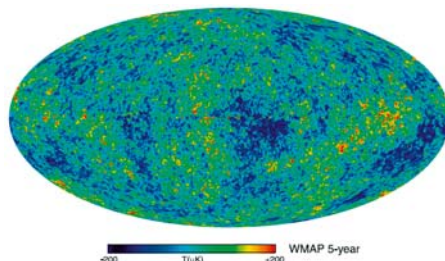


Рис. 14. ILC-карта реликтового излучения (μK)

Последствия «небольшой негауссовости» иллюстрирует схема «ε-загрязнения» Дж. Тьюки [27]:

$$f_{\varepsilon}(\xi) = (1-\varepsilon) \cdot f_G(\theta_{G1}, \theta_{G2}, \xi) + \varepsilon \cdot f_G(\theta_{G1}, \beta \theta_{G2}, \xi), \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – доля,  $\beta$  – параметр масштаба «ε-загрязнения». Так, в задаче Эддингтона-Фишера для оценок равной точности параметра рассеяния смеси (4) при  $\varepsilon = 0$  и  $\beta = 3$  среднее квадратическое отклонение (СКО) требует на 12% меньшего объема выборки, чем среднее абсолютное отклонение (САО). При  $\varepsilon > 0,0018$  соотношение меняется (Таблица 2) и достигает при  $\varepsilon = 0,05 \dots 0,06$  уровня 203%!

При негауссовом возмущающем распределении резко снижается эффективность среднего как оценки параметра положения (Таблица 3) [28]. А при наличии «выбросов» на фоне «гауссовости» без нарушения условий измерений выборочные дисперсия и среднее просто несостоятельны.

Негауссовость данных WMAP обнаружила группа О.В. Верхованова [29 – 30], что независимо подтвердили W. Colley и др. [31], P. Vielva и др. [32] и H. Eriksen и др. [33].

Нарушение условия гомоскедастичности проявляется как снижение эффективности оценок параметров регрессионной модели и как существенное занижение оценок дисперсий и ковариаций параметров, что и

Таблица 1

показывает схема «ε-загрязнения». Часто полагают, что объединение «нервно-точных» данных при помощи схем «взвешивания» повышает точность конечного результата.

Так, в HST Key Project [11] постоянно Хаббла ( $H_0 \pm \text{СлП} \pm \text{НСП}$ ) оценивали различными методами ( $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ ): по сверхновым типа Ia –  $71 \pm 2 \pm 6$ ; по соотношению Талли–Фишера –  $71 \pm 2 \pm 7$ ; по флуктуациям поверхностной яркости –  $70 \pm 5 \pm 6$ ; по сверхновым типа II –  $72 \pm 9 \pm 7$ ; при сглаживании основными соотношениями –  $82 \pm 6 \pm 9$ .

Среднее же взвешенное дало «лучшую» оценку  $H_0 = 72 \pm 8!$

Но оценка параметра рассеяния среднего взвешенного в  $\sqrt{N}$  раз меньше оценки параметра рассеяния смеси распределений, и конечный результат в

возможном отсутствии независимости, о возможности оценивания несущественных аспектов подгонки в различных критериях согласия, о катастрофической неробастности F-критерия и о том, что при достаточно больших выборках практически все критерии превышают уровень значимости. И, самое главное, ни слова о том, что «плавную» нулевую гипотезу никогда статистически доказать нельзя, статистически ее можно только опровергнуть.

Примеры «статистических доказательств» единственности теорий давно стали классическими.

Условие неконфлюэнтности нарушают случайные числа в регрессионной матрице: смещение регрессоров занижает оценки дисперсии, а оценки параметров теряют состоятельность [37].

Таблица 2

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНОК [27]

Отношение	Возмущающее распределение Гаусса (G)												
	0	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,15	0,25	0,5	1	
ε													
СКО/САО	0,876	0,948	1,016	1,198	1,439	1,752	2,035	1,903	1,689	1,371	1,017	0,876	

принципе не может быть точнее наиболее точного компонента. А весовые коэффициенты в методе максимального правдоподобия определяют не по оценкам параметров рассеяния компонентов, а долями данных источников [34].

В HST Key Project корректную оценку точности дала бы схема «ε-загрязнения» Дж. Тьюки (4) для долей распределений [27]. Это обстоятельство давно и хорошо известно в астрономии.

По этой причине «открытия», которые были сделаны при объединении данных WMAP с данными других менее точных экспериментов, были «закрыты» [35].

Условие некоррелированности. Нарушение условия некоррелированности ведет к автокорреляции, последствия которой сходны с последствиями нарушения условия гомоскедастичности:

- оценки параметров, оставаясь несмещенными, теряют эффективность;
- дисперсии оценок параметров становятся смещенными, что ведет к признанию статистически значимыми входных переменных, которые таковыми могут и не являться;
- дисперсия оценки регрессионной модели во многих случаях занижается;
- нарушаются условия применимости t- и F-критериев Стьюдента и Фишера.

Со «статистическим рецептом» Р. Фишера для спецификации параметрической модели этими критериями на основе гипотезы нормальности связан «парадокс Хампеля» [36].

Однако в «рецепте» нет ни слова о

Нарушение условия неограниченности переменных ведет к корреляции между столбцами регрессионной матрицы, к стохастической мультиколлинеарности [38], которая вызывает:

- неустойчивость оценок (добавление или исключение даже одного отсчета приводит к сильному изменению оценок параметров модели и к резкому снижению точности предсказания);
- неустойчивость процедуры оценивания за счет накопления погрешностей округления;
- сильную корреляцию между оценками параметров модели и утерю смысла ее интерпретации;
- резкое увеличение дисперсии оценок параметров модели;
- ненадежность применения критериев значимости.

Согласно условию адекватности структура модели не должна быть избыточной или неполной. Неполнота вызывает смещение остатков, а избыточность – рост дисперсий оценок параметров.

Часто полагают, что увеличение числа параметров модели повышает точность аппроксимации экспериментальных данных [25]. Так, при статистической обработке данных WMAP на основе простой  $\Lambda$ CDM-модели, интересующей наблюдаемую анизотропию, авторы [13] утверждают, что большинство параметров этой модели определяются хорошо. За исключением спектрального индекса  $n_s$  и оптической толщи  $\tau$ . По ним существует явное вы-

Таблица 3

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНОК

Оценка	ε	Вид возмущающего распределения			
		Гаусса	Лапласа	Равномерное	Коши
среднее	0	1	1	1	1
медiana		0,637	0,637	0,637	0,637
среднее	0,05	0,808	0,682	0,362	0,282
медiana		0,669	0,894	0,781	0,765
среднее	1	1	0,5	0,063	0,032
медiana		0,637	1	0,835	0,811

рождение: функция правдоподобия меняется только на 0,05 при изменении оптической толщи в интервале  $0,11 < \tau < 0,19$  [25].

Так же хорошо, как и  $\Lambda$ CDM-модель, экспериментальным данным WMAP, удовлетворяет и модель с т.н. «квинтэссенцией», плотностью «темной материи»  $\Omega_c = 0,47$  и параметром  $h = 0,57$ . Но она была отвергнута, так как получающееся значение параметра Хаббла  $57 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  на  $2\sigma$  меньше, чем значение того же параметра, полученное на телескопе Хаббла [11].

По тем же соображениям была отвергнута и модель с неплоским пространством при наборе параметров  $H_0 = 32,5 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ , плотности «темной энергии»  $\Omega_\Lambda = 0$  и  $\Omega_\Sigma = 1,28$  [25].

Следует заметить, что статистический анализ при выполнении перечисленных выше условий называют классическим линейным регрессионным анализом. При этом оценки параметров моделей обладают согласно теореме Гаусса-Маркова свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности. При этом дисперсия оценки характеристики положения модели становится известной функцией регрессора, а смещение среднего квадрата случайной составляющей погрешности неадекватности определяется числом параметров модели.

Нарушения условия единообразия принципов определения характеристик точности требует более подробных пояснений.

Дело в том, что в работах [13, 21, 39 – 43] по анализу данных WMAP оценки точности результатов с символом  $\pm$  сопровождают пояснения {68%, CL 95%, CL 68%, 68% CL uncertainties, the corresponding 68% intervals, 68% confidence intervals}, реже – {68% and 95% confidence levels}, очень редко – {99% и 99,5% confidence}, но чаще – никаких пояснений. А в отчете WMAP [43] прямо указано, что оценке  $H_0 = 71,9^{+2,6}_{-2,7} \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  соответствует the corresponding 68% intervals.

Завышение точности оценивания в оценках такого рода часто связано с тем, что полной характеристикой результата решения измерительной задачи является распределение вероятностей [44].

Это очевидное обстоятельство получило международное признание только в 2007 году в 3-й редакции международного словаря по метрологии VIM-3 [45], правда, только в примечаниях.

(Продолжение следует)

Сколько раз ни повторять грубое измерение, никогда в среднем результате не получить той точности, которую дало бы одно хорошее измерение.

В.В. Серафимов

Приват-доцент Императорского С.-Петербургского Университета, Товарищ Председателя Русского Астрономического Общества

А. Кларк. Общедоступная история астрономии в 19-м столетии. – Одесса: Изд-во МАТЕЗИС, 1913, с. 14.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ: ПРИЛОЖЕНИЯ

## ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КРУПНОМАСШТАБНОЙ АНИЗОТРОПИИ КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ В СПЕКТРАХ ИЗЛУЧЕНИЯ ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

### THE MATHEMATICAL THEORY OF MEASUREMENT PROBLEMS: APPLICATIONS

Левин С.Ф. (S. Levin), доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой метрологии МИЭИ

(Окончание, начало см. № 6-2009, № 1-2010)

Длительное время путаницу в этот вопрос вносила произвольная интерпретация руководства Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), термины которого confidence level и confidence interval (coverage interval) не соответствуют одноименным терминам математической статистики «доверительная вероятность», «уровень доверия» и «доверительный интервал». О чем, как говорится, открытым текстом отмечено в GUM. Ситуацию усугубил некорректный перевод термина tolerance interval как «допустимый интервал» в ГОСТ Р 50779.10-2000. Правильное определение термина «толерантный интервал» дано в ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 и МИ 2916-2005.

Исходную ошибку обычно совершают уже при постановке измерительной задачи: не уясняют различий между «измерением как сравнением с мерой» и «измерительной задачей как математической задачей, решаемой по данным измерений», а статистическую оценку параметра положения в методе многократных измерений, т.е. результат математического преобразования отсчетов, ошибочно полагают «результатом измерения». Следствием этой ошибки становятся еще три.

Во-первых, точность точечной оценки параметра положения совокупности данных измерений (вычислений, в методе косвенного измерения) в рассматриваемых работах характеризуют точечной оценкой параметра рассеяния для возможных значений оценки параметра положения. Она меньше оценки параметра рассеяния возможных значений искомой величины в  $\sqrt{N}$  раз, но такие оценки объем выборки  $N$ , как правило, не сопровождает. Так, в 1998 году по данным Таблицы 4 CODATA приняло «менее точное» значение гравитационной постоянной  $6,673(10) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$  в сравнении с 1986 годом:  $6,67259(85) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$  [46].

Числа в скобках (СКО) для этих определений интерпретируют так:

$$6,6714(6) \cdot 10^{-11} = (6,6708 \dots 6,6720) \cdot 10^{-11};$$

$$6,6745(8) \cdot 10^{-11} = (6,6737 \dots 6,6753) \cdot 10^{-11};$$

$$6,6731(4) \cdot 10^{-11} = (6,6727 \dots 6,6735) \cdot 10^{-11}.$$

Поэтому вывод о несогласованности этих оценок был неизбежен.

Во-вторых, точность точечных оценок параметров распределений вероятностей характеризуют доверительными интервалами, причем доверительные границы статистических погрешностей оценивания параметров в методе максимального правдоподобия связаны с оценками параметров рассеяния различными коэффициентами на основе распределений Стьюдента и  $\chi^2$ .

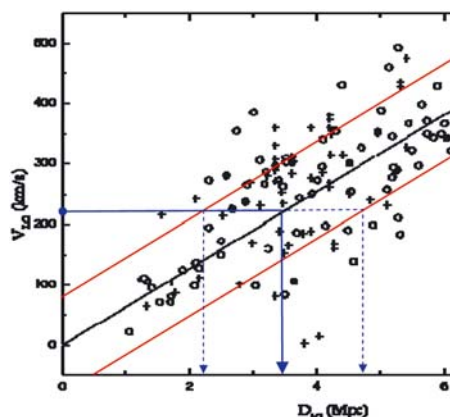


Рис. 15 [10, рис. 4.1]. Характеристика положения зависимости между скоростью и расстоянием для 151 галактики:  $H_0 = 64 \pm 2 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ . Характеристика рассеяния  $s = 74 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$

В-третьих, интервальную оценку точности результата решения размерностной измерительной задачи следует строить не по доверительному, а толерантному интервалу, который содержит с заданной вероятностью заданную долю распределения возможных значений искомой величины, а не параметра положения ее распределения! Для этого следует использовать доверительные интервалы всех параметров распределения, а требуемая доверительная вероятность должна соответствовать композиции составляющих погрешности так, как это принято для распределения Гаусса в ГОСТ Р 50779.21-2004.

Дефект этих «пояснений» в том, что  $\pm 1\sigma$ -интервал выделяет 68% распределения только при точно известных (!)

параметрах и только для распределения Гаусса.

Следует также отметить, что в отчетах WMAP стал появляться раздел «Бюджет погрешностей».

Статистический разброс данных и инструментальные погрешности измерений характеризуют, как правило, двумя различными распределениями вероятностей, по свертке которых и следует находить соответствующий толерантный интервал.

А так как для НСП измерений в поверочных схемах принято равномерное распределение, то распределение результата решения задачи в виде свертки уже не будет гауссовым. Соответствующие выражения для типовых распределений табулированы в [47].

Условие корректности формулировки цели измерительной задачи [44] связано с описанием зависимостей между физическими величинами характеристиками положения и рассеяния, которые при заданных значениях аргументов являются параметрами положения и рассеяния распределения вероятностей. Так как СКО оценки параметра положения в  $\sqrt{N}$  раз меньше СКО с самой величины, то определение характеристик погрешности входной переменной по погрешности оценки параметра наклона и выходной переменной линейной регрессии – грубая ошибка (рис. 15), что относится к диаграмме Хаббла, к соотношению Талли-Фишера и ряду других регрессионных моделей.

Однако есть ряд причин отнюдь не статистического характера, усугубляющих проблему.

Первой является гипотеза о не полном космологическом и доплеровском характере красного смещения в спектрах квазаров, ее выдвинул бывший ассистент Э. Хаббла, опытный астроном Н. Арп. Он собрал каталог взаимодействующих галактик и квазаров с существенно различающимися красными смещениями. Примерами этой выборки стали галактика NGC 4319 и квазар Markarian 205, связанные перемычкой (рис. 16), и квазар с смещением  $z = 2,11$  на фоне галактики NGC 7319 со смещением  $z = 0,0225$  (рис. 17) [48]. Официальное объяснение NASA есть только по первому примеру: «Видимое может обманывать. NGC 7319 находится в 80 миллионах световых лет, Markarian 205 – более чем в 14 раз дальше, то есть в 1 миллиарде световых лет. Это – просто случайность».

#### ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ ГРАВИТАЦИИ G [46]

Год	Источник	Оценка, $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$	Год	Источник	Оценка, $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$
1972	Facy, Pontikis C.	$6,6714(6) \cdot 10^{-11}$	1982	Luther, Towler	$6,6726(5) \cdot 10^{-11}$
1979	Sagitov et al.	$6,6745(8) \cdot 10^{-11}$	1988	Karagioz	$6,6731(4) \cdot 10^{-11}$

Таблица 4

В этой связи для диаграммы Хаббла открытыми остаются вопросы нарушения условия статистической однородности данных о светимости и определении модулей расстояния, среди которых наиболее острым является вопрос калибровки шкалы расстояний для квазаров.

Вторая причина связана в том, что повышение точности измерений, связанных с определением характеристик реликтового излучения, привело в задачах идентификации космологических моделей к явному парадоксу. Он состоит в том, что по стандартной  $\Lambda$ CDM-модели плоской Вселенной с помощью программы CMBFAST строят различные зависимости и смотрят, при каких значениях параметров достигается наилучшее согласие теории и эксперимента [23]. Параметрами стандартной  $\Lambda$ CDM-модели являются плотности  $\Omega_b$  барионной материи (обычного вещества),  $\Omega_c$  «темной материи» (Cold Dark Matter) и  $\Omega_\Lambda$  «темной энергии» неизвестной природы. Параметр  $\Omega_\Lambda$  ставят в соответствие  $\Lambda$ -члену в уравнении Гильберта–Гроссмана–Эйнштейна, нестационарное решение которого при  $\Lambda = 0$  и получил А. Фридман в 1922 году.

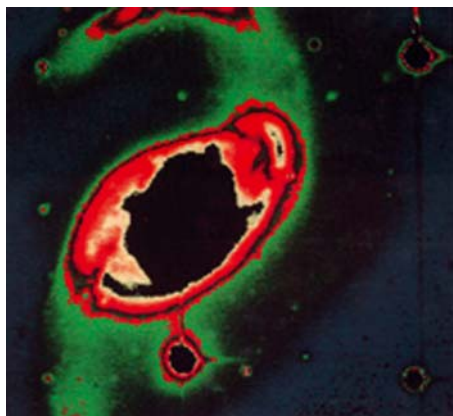


Рис. 16 [43]. NGC 4319 и Markarian 205

Фактически же параметры  $\Omega_b$ ,  $\Omega_c$  и  $\Omega_\Lambda$  в единицах т.н. критической плотности в стандартной  $\Lambda$ CDM-модели используются как дополнительные степени свободы при аппроксимации экспериментальных данных. Если  $\Omega_b + \Omega_c + \Omega_\Lambda < 1$ , то «расширение» Вселенной будет продолжаться неограниченно, в противном случае – сменится сжатием. При этом по данным измерений WMAP за 5 лет  $\Omega_b = 0,00441 \pm 0,00030$ ,  $\Omega_c = 0,214 \pm 0,027$  и  $\Omega_\Lambda = 0,742 \pm 0,030$ . То есть  $\Omega_\Sigma = \Omega_b + \Omega_c + \Omega_\Lambda = 0,96 \pm 0,06$ .

И получается, что «расширение» Вселенной связано неизвестно с чем.

Поэтому сенсацией 2007 года стало заявление, которое сделал профессор G. Verschuur [49]: флуктуации реликтового излучения хорошо коррелируют с распределением облаков нейтрального водорода в Галактике, с ними связано излучение неизвестной природы, вносящее в данные измерений температуры реликтового излучения неучтенные

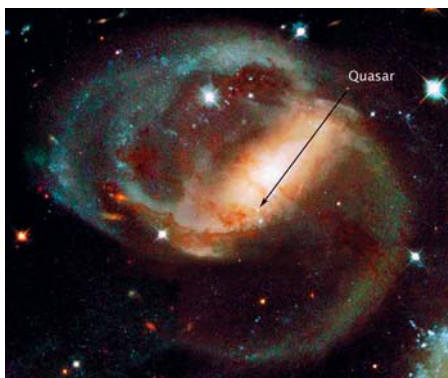


Рис. 17 [43]. NGC 7319

систематические погрешности, что требует как минимум пересмотра результатов их применения для анализа космологических моделей.

Кроме того, стандартная  $\Lambda$ CDM-модель, описывающая данные WMAP на всем интервале углов небесной сферы, дает несовпадение на больших и малых угловых масштабах [13]. Если несовпадения на малых масштабах можно убрать, включив в рассмотрение нестепенной спектр возмущений, то несовпадение модели на больших масштабах представляется более загадочным [25].

Авторы [13], обсудив ряд объяснений этого явления в рамках современной физики, пришли к выводу, что это, возможно, указание на эффекты новой физики.

Третья причина в том, что апекс движения Солнца относительно реликтового излучения находится именно на границе созвездий Льва и Чаши, и в этом же районе небесной сферы – сверхскопления Shapley, Virgo, Vela, Coma, Hydra, Великий Аттрактор и превышающее их размерами сверхскопление галактик и квазаров Leo. В этом же направлении – минимум потока космических мюонов. А антиапексу движения Солнца соответствует температурный минимум реликтового излучения в Aquarius, максимум потока космических мюонов и Eridanus (Эридан) с пониженной температуры реликтового излучения, там –

гигантская пустота (Super void) с поперечником до 3 Гпс.

Таким образом, существенное повышение точности измерений, появление «темных пятен» при интерпретации экспериментальных данных, а также обнаружение связи реликтового излучения и красного смещения с крупномасштабными пространственными структурами Вселенной (рис. 18) ставит перед космологией проблему уточнения и даже пересмотра ее математических моделей.

### ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ АНИЗОТРОПИИ ДИАГРАММЫ ХАББЛА

Применение метода максимального правдоподобия в экспериментах по исследованию реликтового излучения основано на функции правдоподобия. Она представляет собой совместную плотность распределения вероятностей (ПРВ), принятую для описания совокупности данных многократных измерений в условиях сходимости. Однако в математической статистике сходимость статистического распределения к распределению вероятностей рассматривается не для распределения относительных частот и ПРВ, а только для статистической функции распределения (СФР) данных, которая согласно теореме Гливенко–Кантелли является несмещенной и состоятельной оценкой функции распределения вероятностей (ФРВ), причем вопрос о виде ФРВ, естественно, остается открытым.

Разработанные в XX-м веке методы статистического анализа Ф. Тарасенко классифицировал по объему используемой априорной информации [50]: «Чем больше априорной информации использует статистическая процедура, тем выше качество выдаваемых ею решений. Чем меньше априорной информации заложено в процедуру, тем слабее ухудшает решение ее ложность».

Последнее обстоятельство учитывают методы непараметрической и робастной статистики.

Для решения начальных задач математической статистики [51], т.е. для слу-

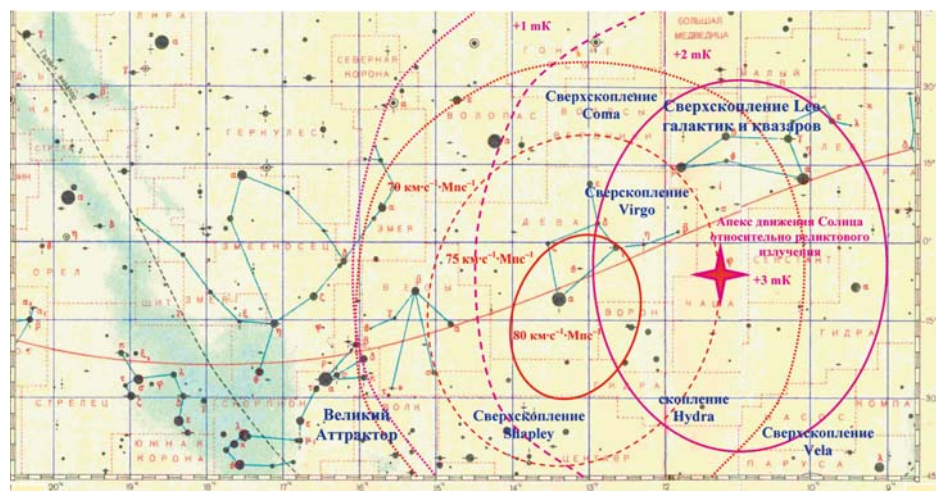


Рис. 18. Карта постоянной Хаббла Местной групп галактик и реликтового излучения в Centaurus–Virgo–Leo

чая отсутствия достоверной априорной информации о виде распределения вероятностей и выполнении условия статистической однородности данных [52], в 1980-е годы в рамках интерполяционной концепции вероятности был разработан метод максимума компактности (ММК) [53, 8, 44, 19].

Основания для формулировки измерительной задачи идентификации крупномасштабной пространственной анизотропии красного смещения  $z$  по данным [1] возникли после идентификации зависимости красного смещения от звездных величин, угловых координат и угловых размеров радиогалактик и квазаров при помощи «ММК-стат М» [9]. Эта система предназначена для структурно-параметрической идентификации многомерных полиномов в схеме перекрестного наблюдения погрешностей неадекватности алгоритма ММКМНК и ММКМЕДС [54].

Общая доплеровская интерпретация анизотропии реликтового излучения [7, 25] и красного смещения для галактик [10], радиогалактик и квазаров [9] позволяет решить задачу идентификации анизотропии диаграммы Хаббла методом композиционной идентификации [44].



**Рис. 19. Идентификация положения диполя красного смещения радиогалактик и квазаров**

Предварительно решение было получено для 12 кластеров из перечня [1] по 120 радиогалактик и квазаров со смещением с шагом 1 час по прямому восхождению при помощи «ММК-стат» с приведением углового положения границ кластеров к максимуму правдоподобия гипотезы о статистической неоднородности в области диполя реликтового излучения (рис. 19) [55]. Это позволило уточнить границы кластеров для  $N = 172$  радиогалактик и  $N = 201$  квазара и по данным [18] принять  $M_{\text{ММКМНК}} = -25,06$ ;  $M_{\text{ММКМЕДС}} = -25,29$ .

Анализ показал, что без учета статистической неоднородности данных [1] стандартное решение для диаграммы

**СТАНДАРТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИАГРАММЫ ХАББЛА**

Алгоритм	Радиогалактики	Квазары
Linear Reg	$1,29400272+0,18884519 \cdot m$	$3,53624348+0,10514146 \cdot m$
Med-Med:	$1,15657422+0,19943534 \cdot m$	$2,33850079+0,17799605 \cdot m$

Хаббла дает не линейная регрессия, а медианный алгоритм (Таблица 6), т.к. при этом оценка параметра наклона ближе к стандартному значению 0,2.

В Таблице 7 с указанием среднего абсолютного отклонения  $d$  данных [1] от модели (2) дано решение задачи алгоритмом ММКМЕДС в режиме композиционной идентификации (рис. 20).



**Рис. 20. Проверка гипотез о статистической однородности выборок радиогалактик**

В итоге для радиогалактик и квазаров локальное значение постоянной Хаббла существенно отличается от среднего и составляет 85...86  $\text{км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$ . При этом в области максимума температуры диполя реликтового излучения «среднее» значение постоянной Хаббла для квазаров соответствует «зоне избегания», в которой Млечный Путь затеняет излучение внегалактических объектов, а для радиогалактик наоборот – соответствует одному из квадруполей красного смещения галактик.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Крупномасштабная анизотропия красного смещения согласуется с анизотропией реликтового излучения и, по всей видимости, имеет в перечне своих факторов общие компоненты, важнейшим из которых является крупномасштабная неоднородность структуры Вселенной. При этом гипотеза [4, с. 36] о том, что «космологические модели расширения предполагают неоднородность распределения вещества, и, как следствие, переменность скорости расширения», не противоречит полученному результату.

В свою очередь явление анизотропии является причиной крупномасштабной неоднородности данных прецизионных

измерений в космических экспериментах, что в совокупности с нарушениями условий применимости статистических методов привело к несогласованности оценок постоянной Хаббла и параметров космологических моделей.

Выявленные особенности диаграммы Хаббла в области созвездий Девы и Льва указывают на различия доплеровского вклада в красное смещение радиогалактик и квазаров, что не противоречит гипотезе, которой придерживается Н. Арп [43].

Следует заметить, что данные о красном смещении [1] были опубликованы в нашей стране в 1978 году. И задача идентификации анизотропии диаграммы Хаббла могла быть решена методом композиционной идентификации [46] еще в 1988 году. Но тогда первоочередным был анализ причин катастрофического феномена в авиационной, ракетной, космической и ядерно-энергетической технике, а катастрофа Challenger 28 января 1986 года задержала эксперимент COBE на 4 года.

Вместе с тем полученные результаты следует рассматривать как иллюстрацию применения адаптивных программ «ММК-стат» и «ММК-стат М» в качестве эталонных.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ленг К. Астрофизические формулы. – М.: Мир, 1978.
  2. Sandage A.R. Die Rotverschiebung/Das Universum (Поликарпов А. Относительность и кванты. – М.: Прогресс, 1966. – С. 288).
  3. Humason M.L., Mayall N.U., Sandage A.R. Red shift and magnitudes of extragalactic nebulae. – Astron. J. – 1956. – V.61. – P. 97.
  4. Левин С.Ф. Оптимальная интерполяционная фильтрация статистических характеристик случайных функций в детерминированной версии метода Монте Карло и закон красного смещения. – М.: АН СССР, НСК, 1980.
  5. Arp H. Peculiar Galaxies and Radio Sources. – Astrophysical J. – 1967. – P. 321.
  6. Бербидж Дж., Бербидж М. Квазары. – М.: Мир, 1969.
- И другие. ☑

Таблица 7

**АНИЗОТРОПИЯ ДИАГРАММЫ ХАББЛА ДЛЯ РАДИОГАЛАКТИК И КВАЗАРОВ (ПРОТОКОЛ ВЫЧИСЛЕНИЙ)**

$\alpha, \text{ч}$	Состав кластера	Радиогалактики			Квазары				
		$N$	Нуль-пункт	$d$	$H_0$	$N$	Нуль-пункт	$d$	$H_0$
0-23	Небесная сфера	172	<b>1,102781368</b>	<b>0,1675391195</b>	<b>74,2</b>	201	<b>1,927545494</b>	<b>0,2713123928</b>	<b>74,2</b>
2-7	Зона избегания, Super void	41	1,010846809	0,1939608458	60,0 4409401	24	1,994812783	0,2558856358	86,6 305745
8-14	Dipole <sup>+</sup> реликтового излучения	55	1,10316107	0,1580165622	74,2 6506365	107	1,882339956	0,2903283077	66,8 6492579
15-21	Зона избегания, Центр Галактики	39	1,167932969	0,1726058948	86,2 0976408	25	1,91629875	0,1750253695	72,3 0314055
22-1	Dipole <sup>-</sup> реликтового излучения	37	1,163169039	0,1314588212	85,2 6926627	45	1,992599459	0,26001399	86,1 9019647